

一种全局优化的水平集图像分割方法

贾迪野 黄凤岗 文小芳

(哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院, 哈尔滨 150001)

摘要 该文对 Chan-Vese 提出的水平集图像分割算法进行了改进, 提出了分段光滑的 Mumford-Shah 全局优化的水平集图像分割模型, 并对偏微分方程进行了修正, 以提高模型的图像分割能力。实验表明, 该方法不但解决了 C-V 方法对于灰度值渐进图像无法正确分割的问题, 同时可更精确地描述原图像, 是一种高效、稳定的图像分割模型。另外, 针对水平集方法中符号距离函数构造计算量大的问题, 还提出一种全邻域源点扫描法, 以便通过对图像平面网格点的扫描来实现距离函数的快速计算, 这种方法不仅计算性能稳定, 而且速度快、精度高。

关键词 图像分割 Mumford-Shah 水平集方法 符号距离函数

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)01-0025-06

A Global Optimal Image Segmentation Method Using Level Sets

JIA Di-ye, HUANG Feng-gang, WEN Xiao-fang

(School of Computer Science & Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001)

Abstract In this paper a new image segmentation model based on techniques of curve evolution, piecewise-smooth Mumford-Shah functional for segmentation and level sets was proposed as improvement of C-V method. New method shows global optimization and less insensibility of initialization and can detect objects whose boundaries are not necessarily defined by gradient and solves the problem of locating the edges on images with non-uniform brightness, for which the previous methods based on piecewise-constant Mumford-Shah model, including the C-V method, are not applicable. Besides, the model was improved for the location of subtle and complicated edges of target objects by the modification of PDE. In order to further stabilize and fasten the level set evolution procedures, the paper addresses an improved approach to construction of the signed distance function using new Voronoi source scanning method, which needs simple comparison and few multiplication operations, faster than the traditional approaches. Finally, various experimental results for synthesized and real images will be presented to prove the proposed model efficiency and stabilized.

Keywords image segmentation, Mumford-Shah, level set method, signed distance function

1 引言

图像中物体的分割与轮廓的提取是计算机视觉与高层次图像处理的基础, 由 Kass 等人提出的主动轮廓模型^[1]是一种有效的目标轮廓提取方法。主动轮廓模型主要分为参数化主动轮廓模型(parametric active contour, PAC)和几何主动轮廓模型(geometric active contour, GAC), 其中, PAC 不但必须对曲线的演化进行跟踪和参数化, 且难于处理

闭合曲线的分裂与融合; GAC 则基于水平集方法^[2](level set method)和曲线演化理论(curve evolution)将平面的闭合曲线转化为空间水平集曲面的零水平集, 由于其避免了对拓扑结构变化的处理, 且计算稳定, 从而得到广泛应用^[3,4]。

但由于几何主动轮廓模型仅利用图像的局部边缘信息, 而对边缘模糊或存在离散状边缘的区域, 则很难得到理想的分割结果, 为此, Chan 和 Vese 提出基于 Mumford-Shah 模型^[5]的水平集图像分割方法^[6], 该方法由于利用了图像同质区域的全局信

收稿日期: 2004-01-15; 改回日期: 2004-08-19

第一作者简介: 贾迪野(1976~), 男, 1976年生, 2001年获哈尔滨工程大学硕士学位, 现为哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院博士研究生。主要研究方向为图像处理、信号处理与计算机视觉。E-mail: jiadiye@126.com

息,从而得到了比较理想的分割结果。文献[7]又对 C-V 方法进行改进,更进一步提高了原方法的分割速度和鲁棒性。总的来说,文献[6,7]工作都是基于分段恒定的 Mumford-Shah 模型,即属于原模型的“最小划分问题”。在此基础上,本文提出一种分段光滑的 Mumfor-Shah 水平集图像分割方法,该方法不仅在保证单次迭代中对能量函数进行全局最优化的同时,可得到原图像的更佳表达,而且,新方法还解决了对灰度值渐进图像正确分割的问题;其次,针对偏微分方程,文中提出一种修正算子,实验证明,改进后的模型对细微的、复杂的边缘分割效果很理想。本文还对源点扫描法^[8]进行了改进,提出了全邻域源点扫描法,从而保证了水平集方法中一个十分关键的符号距离函数的计算精度。

2 水平集方法及符号距离函数的建立

2.1 水平集方法

设二维闭合曲线 $C(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$, s 是参数化变量, t 是时间,并设闭合曲线的内向单位法矢为 \mathbf{N} ,则曲线沿单位法矢方向的曲线演化偏微分方程如下:

$$\frac{\partial C(s, t)}{\partial t} = V(C(s, t))(s, t)\mathbf{N} \quad (1)$$

式中, $V(C(s, t))$ 是速度函数,它用于决定曲线 C 上每点的演化速度。

Osher 和 Sethian 提出将平面闭合曲线 C 表达为水平集函数 $\varphi(x, y)$ 的某一函数值的点集,一般是零水平集,即 $\varphi = 0$ 。通常水平集函数 φ 由闭合曲线 C 生成的符号距离函数 (signed distance function, SDF) 表达。设 $\varphi(x, y, t) = \pm d$ 是符号距离函数,其中, d 是点 (x, y) 到闭合曲线 $C(t)$ 的距离,等式右端的正负符号可根据点 (x, y) 在曲线的内外部而定,可取曲线内为正,曲线外为负,或反之。

与式(1)对应的水平集函数 φ 的演化,遵循如下 Hamilton-Jacobi 偏微分方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = V|\nabla \varphi| \quad (2)$$

式中, V 是沿水平集函数 φ 的法线方向的速度函数。

2.2 符号距离函数 SDF 的快速建立

符号距离函数的建立和保持对水平集方法的计算十分重要。由于初始化就是建立原始闭合曲线为零水平集的符号距离函数,并以之表示水平集的过

程,且在计算中要求这一特性必须得到保持,因此,每次更新水平集后,都需将水平集重新初始化为符号距离函数,这是算法计算量的重要组成部分。

符号距离函数的建立分为以下两部分:首先是建立符号图 K_p ,用以区分闭合曲线 C 的内部和外部。并以正号(负号)标记 C 的内部,内部符号 $K_p^{\text{in}} = +1$; 负号(正号)标记 C 的外部,外部符号 $K_p^{\text{out}} = -1$ 。其次是计算网格中每一点 P 到 C 的最短距离 d_p ,则

$$\varphi(P) = K_p d_p \quad (3)$$

如果直接计算,总的计算复杂度为 $O(MN)$,其中, M 是 C 上总点数, N 是网格点数,可见计算量大。Malladi 提出利用快速步进法 (fast marching method) 生成 SDF^[3],计算量虽可以减少到 $O(N \ln M)$,但仍然不小。Tsai 对最近点距离的计算方法进行了研究,提出源点扫描法^[8],本文对其进行了改进,即通过扩大源点扫描范围,提出全邻域源点扫描法,该方法只需对全部网格点做 4 次扫描和简单的运算就可完成 SDF 的建立,其计算量仅为 $O(N)$ 。

定义 1 设 Ω 是 \mathbf{R}^2 上的连通子集,点 $P \in \Omega$, 闭合曲线 C 的点集 $\Gamma \subset C$,且 $\Gamma \subset \Omega$,定义点 P 关于 Γ 的源点 (source point, 即 P_s 的下角 S) 为 $P_s = \{P_s \in \Gamma; d(P, \Gamma) = |P - P_s|\}$,从定义可以看出, P 点在 Γ 上的源点 P_s 就是 Γ 上距离 P 点最近的点。

定义 2 设 $P_s \in \Gamma$ 是点 P 在 Γ 上的源点,以 P 和 P_s 为端点的线段 PP_s 称为 P 点关于 Γ 的特性线 (characteristic),如果闭合曲线 C 是光滑的,则 PP_s 垂直于曲线 C 。

定义 3 (2 维扫描方向) 按下列规则排列 2 维网格 $(1:N_x - 1, 1:N_y - 1)$ 上的扫描迭代方向定义为: $(x+, y+)$ 扫描: 从左到右,从上到下; $(x-, y+)$ 扫描: 从右到左,从上到下; $(x+, y-)$ 扫描: 从左到右,从下到上; $(x-, y-)$ 扫描: 从右到左,从下到上;

如图 1 所示, C 代表闭合曲线, P 点是待求点, I 和 J 是 P 点在 $x-$ 和 $y+$ 方向的轴向邻点, Q 点是 P 点的 $\sqrt{2}$ 邻点, M_s 、 Q_s 、 P_s 和 N_s 分别是对应的源点。本文提出的全邻域源点扫描法是基于这样的设定,即闭合曲线 C 上所有点的源点就是自己,而网格上其余点则和它的 8 个邻点 (轴向邻点与 $\sqrt{2}$ 邻点) 之一的源点相同,且在同一特性线上,而且通过扫描确定源点,即可实现距离函数值的快速计算。具体实现步骤如下:

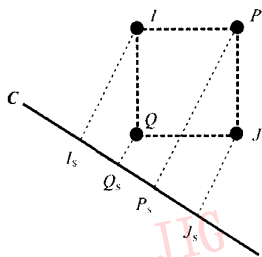
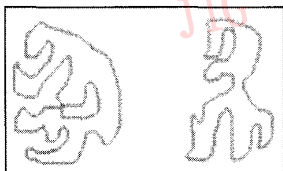


图 1 源点示意图

Fig.1 Voronoi source points

(1) 初始化. 计算距离闭合曲线 C 的离散点集 Γ 最近的网格点 $P_{\min} = \{P \in \Omega; 0 \leq d(P, \Gamma) \leq 1\}$ 到 Γ 的准确距离 d 及相应的源点 P_s , 并将最近点的 d 保存到距离函数数组 D , 源点 P_s 保存到映射数组 S , 并将所有最近点标记为 Visited; 而设其他点的 $d = +\infty$, 标记为 Unvisited;



(a) 形状任意的闭合曲线



(b) 符号图



(c) 符号距离函数

图 2 全邻域源点扫描法生成的符号距离函数

Fig.2 Construction of the SDF based three curves using new voronoi source scanning method

此可以看出,这是一种行之有效的方法。

表 1 对常用的 3 种 SDF 生成方法,即对直接法(直接计算待求点到闭合曲线 C 的最短距离,加上

表 1 SDF 构造方法比较

Table 1 Efficiency comparison for three approaches construction of SDF

计算方法	网格大小	曲线点数	计算用时(s)	方差(%)
直接法	128 × 128	204	0.461 0	-
		1068	2.313 0	-
	256 × 256	441	4.326 0	-
		1504	14.651 0	-
	512 × 512	822	31.214 0	-
		2275	78.944 0	-
Fast Marching 方法	128 × 128	204	0.721 0	54.348 1
		1068	2.754 0	2.809 5
	256 × 256	441	6.489 0	92.564 8
		1504	26.388 0	10.575 3
	512 × 512	822	69.640 0	194.416 1
		2275	176.664 0	52.387 4
全邻域源点扫描法	128 × 128	204	0.100 0	0.005 6
		1068	0.101 0	0.011 0
	256 × 256	441	0.511 0	0.003 8
		1504	0.511 0	0.006 0
	512 × 512	822	2.022 0	0.002 2
		2275	1.832 0	0.002 9

注: 方差 - 表示与直接法计算所得结果之间的统计方差。

(2) 分别以 4 个扫描方向 $(x+, y+), (x-, y+), (x+, y-), (x-, y-)$ 扫描网格 Ω 。每次扫描中,更新每个网格点 P (标记为 Visited 的除外) 的距离函数值 d_p 及其源点 P_s , 更新方法如下:

- ① 计算点 P 与每个八邻接点 P_j 的源点 $P_s^{(j)}$ 的距离 $d_{\text{temp}}^{(j)} = |P - P_s^{(j)}|$;
- ② 如果 $d_{\text{temp}}^{(j)} < \min_j d_p$, 则 $d_{\text{temp}}^{(j)} = +\infty$, 以保证距离函数的单调性;
- ③ 设 $d_p = \min_j d_{\text{temp}}^{(j)} = d_{\text{temp}}^{(i)}$ 且 $P_s = P_s^{(i)}$ 。

图 2 是本文方法生成的符号距离函数示意图。生成符号距离函数时,首先,利用 Fast Marching 方法生成符号图(图 2(b)),并标记曲线内为正、曲线外为负;然后用全邻域源点扫描法快速生成距离函数值,再加上符号就得到最终结果(图 2(c))。由

符号作为当前点的 SDF)、Fast Marching 方法及全邻域源点扫描法的实验结果进行了对比。从实验结果可以看出,在不同分辨率(128 × 128, 256 × 256, 512 × 512)和不同曲线长度的条件下,文中提出的方法不仅计算最快、计算精度高,而且计算时间和曲线的长度没有直接关系。

3 分段恒定的 Mumford-Shah 主动轮廓图像分割方法

Chan 和 Vese 提出一种基于简化 Mumford-Shah 区域最优划分的图像分割模型^[6]。设定义域为 Ω 的图像 u_0 被闭合边界 C 划分为目标 ω_o (下角 o 代表 C 的内部 object,下同)和背景 ω_b (下角 b 代表 C 的外部 background,下同)两个同质区域,各个区域的平均灰度为 \bar{g}_o 和 \bar{g}_b ,考虑以下拟合能量函数:

$$F(\bar{g}_o, \bar{g}_b, C(s, t)) = \mu L(C(s, t)) + \nu S(C(s, t)) + \lambda_o \int_{K_{\text{in}}(C(s, t))} |u_0(x, y) - \bar{g}_o|^2 dx dy + \lambda_b \int_{K_{\text{out}}(C(s, t))} |u_0(x, y) - \bar{g}_b|^2 dx dy \quad (4)$$

其中, L_C 是闭合曲线 C 的长度; S_{ω_o} 是 C 的内部目标

区域面积; $\mu, \nu \geq 0$ 及 $\lambda_o, \lambda_b > 0$ 是各个能量项权重系数。当闭合曲线 C 没有位于两个同质区域的边界时, 则式(4)不能达到最小值; 只有当闭合曲线位于两个同质区域边界时, 能量函数才能达到最小。由于式(4)利用了图像的全部信息, 因此通过最优化, 可得到全局最优的分割结果。

设 φ 是根据闭合曲线 C 构造的水平集函数, 即 $\{C|\varphi(x, y) = 0\}$, 并设 φ 为内正外负型 SDF。Chan 和 Vese 以欧拉-拉格朗日方法推导出了以下满足式(4), 并以水平集函数表达的偏微分方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta(\varphi) \left[\mu \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} - \nu - \lambda_o (u_o(x, y) - \bar{g}_o)^2 + \lambda_b (u_o(x, y) - \bar{g}_b)^2 \right] \quad (5)$$

式中, $\delta(x)$ 是 Dirac 函数。

文献[7]指出, 尽管 C-V 方法具有全局优化特性, 且不受边缘局部信息的限制, 但由于 Dirac 函数狭窄的定义范围, 对于远离闭合曲线 C 的边缘不能稳定地检测。文献[7]对 C-V 方法进行了改进, 即将式(5)中的 $\delta(\varphi)$ 替换为 $|\nabla \varphi|$, 则偏微分方程变为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \left[\mu \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} - \nu - \lambda_o (u_o(x, y) - \bar{g}_o)^2 + \lambda_b (u_o(x, y) - \bar{g}_b)^2 \right] \quad (6)$$

由于 $|\nabla \varphi| \approx 1$, 因此消除了 Dirac 函数对于远端边缘检测的抑制, 实验表明, 式(6)比式(5)具有更好的全局优化特性。

4 分段光滑的 Mumford-Shah 水平集图像分割模型

C-V 方法和文献[7]的改进模型都是基于分段恒定的简化 Mumford-Shah, 即属于原模型的“最小划分问题”。为了得到原图像更佳的表情, 本文提出一种分段光滑的 Mumford-Shah 主动轮廓水平集图像分割模型。

考虑定义在区域 Ω 上的图像 u_o , 其目标边缘 C 。可用水平集表达。Mumford 和 Shah 提出如下图像分割模型:

$$F^{MS}(u(x, y), C) = \nu \cdot L(C) + \mu \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \int_{\Omega} |u_o(x, y) - u(x, y)|^2 dx dy \quad (7)$$

式(7)中 $\mu > 0, \nu > 0$ 是固定的权值系数。最小化

式(7)可得到原图像 u_o 的最优分段光滑近似图像 u 和表征目标边缘 C_o 的闭合曲线 C , 并且 u 只在 C 之外光滑, 即 $\Omega \setminus C$ 。

以初始闭合曲线 C_o 为零水平集构造水平集函数 φ , 令 φ 是内正外负型 SDF。设待求图像函数 $u(x, y)$ 满足:

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y) = u_o(x, y) & \text{if } \varphi(x, y) > 0 \\ u^-(x, y) & \text{if } \varphi(x, y) \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $u^-(x, y) \in C^1$ 。

从式(7)出发, 本文提出如下最小化能量函数模型:

$$\inf_{u^-(x, y), \varphi} F(u^-(x, y), \varphi)$$

其中

$$F(u^-(x, y), \varphi) = \int_{\Omega} |u^- - u_o(x, y)|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy + \mu \int_{\Omega} |\nabla u^-(x, y)|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy + \nu \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi)| \quad (9)$$

利用变分方法可得到以下满足式(9), 并用水平集函数 φ 表达的偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta(\varphi) \left[\nu \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} + |u^-(x, y) - u_o(x, y)|^2 + \mu |\nabla u^-(x, y)|^2 \right] \\ \frac{\delta(\varphi)}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\partial \varphi / \partial \mathbf{n}$ 是边界 $\partial \Omega$ 上的法向偏导数; $\delta(\varphi)$ 是 Dirac 函数, 为消除它对远端边缘检测的抑制, 本文将之替换为 $|\nabla \varphi|$, 新的偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \left[\nu \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} + |u^-(x, y) - u_o(x, y)|^2 + \mu |\nabla u^-(x, y)|^2 \right] \\ \frac{\delta(\varphi)}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

同时得到如下关于 $u^-(x, y)$ 的欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} u^-(x, y) - u_o(x, y) &= \mu \nabla^2 u^-(x, y), \\ \frac{\partial u^-(x, y)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\partial u^-(x, y) / \partial \mathbf{n}$ 为零水平集上的法向偏导数。

在式(11)偏微分方程模型基础上, 为了加强模型对图像中细微、复杂边缘的分割能力, 本文提出用拉普拉斯算子作为修正算子, 将偏微分方程修改为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \left[\nu \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} + |u^-(x, y) - u_0(x, y)|^2 + \mu |\nabla u^-(x, y)|^2 + 2\eta \nabla^2 (G_\sigma * u_0(x, y)) \right] \quad (13)$$

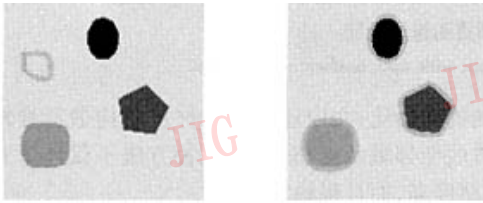
其中, $\nabla^2 (G_\sigma * u_0(x, y))$ 是对原图像进行高斯卷积滤波后再进行拉普拉斯计算, η 是权值系数。

5 实验结果及讨论

为验证文中方法的有效性, 对不同类型图像进行了处理实验。实验中所有方法均采用本文提出的

全邻域源点扫描法来生成 SDF, 以提高计算速度和稳定性。

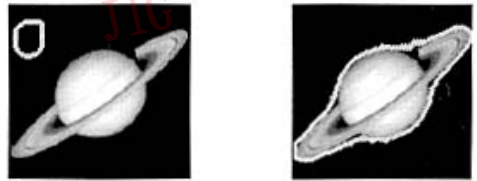
图 3、图 4 分别是对多边形图像和土星图像的分割, 图 3(a) 和图 3(b) 是多边形图像初始闭合曲线位置及分割结果, 图 4(a) 和 4(b) 是土星图像初始闭合曲线位置及分割结果, 由该两图可见, 不同位置、不同灰度的区域可被成功地分割和表示。图 5、图 6 是对气泡图像的分割, 两组图中初始闭合曲线置于不同的位置和不同的情况, 分割结果也都很理想, 即使是远离初始闭合曲线的边缘也被成功地识别。



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 3 多边形图像分割

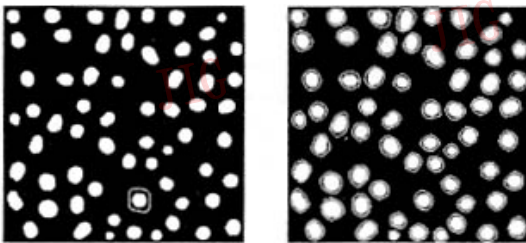
Fig. 3 Polygon image segmentation



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 4 土星图像分割

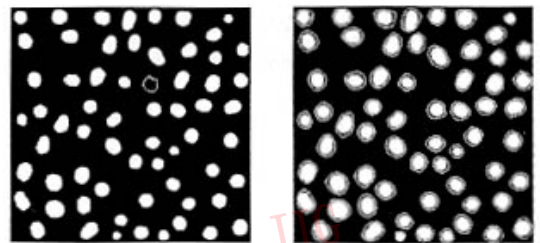
Fig. 4 Saturn segmentation



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 5 气泡图像分割(I)

Fig. 5 Spots image sementation(I)



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 6 气泡图像分割(II)

Fig. 6 Spots image sementation(II)

在研究过程中笔者发现, 尽管 C-V 方法和文献 [7] 的方法具有很好的全局优化特性和不依赖于图像边缘信息的特点, 但对于灰度值渐进图像的分割却显得力不从心。如图 7 所示, 图 7(a) 是原图, 图像中的边缘并不明显, 图 7(e) 和图 7(g) 分别是 C-V 方法和文献 [7] 方法的分割结果, 图 7(f) 和图 7(h) 是两种方法的分割结果示意图, 由该两图可见, 分割效果很不理想。这是因为 C-V 方法和文献 [7] 方法仅利用了灰度均值这一简单的描述手段, 而忽略了图像提供的其余信息, 不能良好地描述原图造成的。本文方法基于分段光滑的图像描述, 由于得到了原图更近似的表达, 因而分割效果很理想 (如图 7(c) 所示)。图 7(d) 是按照式 (8) 定义的分割结果示意图。

从实验结果和以上的理论推导可以得出本文方法具有以下特点: 首先, 与以前方法相比, 模型基于分段光滑的 Mumford-Shah, 可更佳地表达原图像; 其次, 本文方法具有全局优化的特点, 其分割范围是整个图像区域, 即使远离初始闭合曲线的边缘, 也能被准确地分割, 而且, 方法对于初始曲线的位置没有特别的要求; 第三, 本文方法不依赖于边缘信息, 对于模糊或离散状的边缘, 仍然可以获得理想的分割效果。

图 8、图 9 是钥匙和工具两种图像修正模型的分割结果, 添加修正算子主要是为了加强图像边缘的影响, 以便使其在某些情况下可以得到更加理想的分割结果。如图 8、图 9 所示, 修正以后的模型对细微、复杂的边缘也可以进行理想的分割。

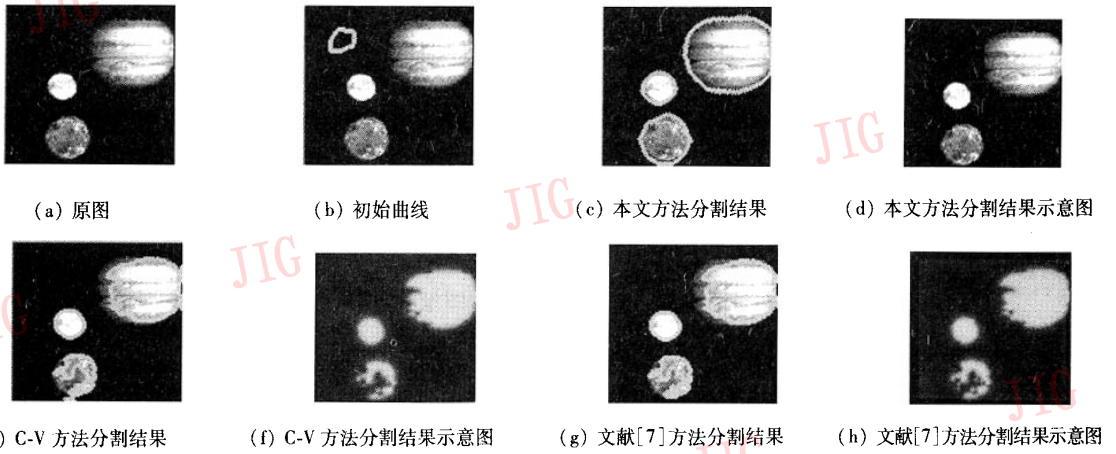


图 7 3 种方法分割灰度值渐进图像的比较

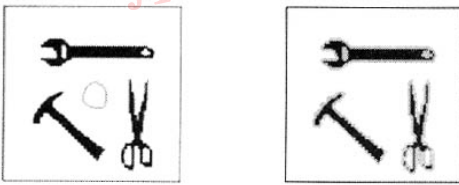
Fig. 7 Comparisen of three method used to image with non_uniform illumination



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 8 钥匙修正模型图像分割

Fig. 8 Segmentation results of our improved approach(I)



(a) 初始曲线 (b) 分割结果

图 9 工具修正模型图像分割

Fig. 9 Segmentation results of our improved approach(II)

6 结 论

本文提出了一种分段光滑的 Mumford-Shah 全局优化的水平集图像分割模型,并对偏微分方程进行了修正,从而提高了图像分割能力。实验表明,新方法不仅克服了以前类似方法对于灰度值渐进图像无法正确分割的缺陷,同时可更精确地描述原图,是一种高效、稳定的图像分割模型。另外,针对水平集

方法的初始化,文中还提出一种快速构造符号距离函数的全邻域源点扫描法,这种方法不仅计算速度快、精度高,而且很稳定。

参考文献 (Reference)

- 1 Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321~332.
- 2 Sethian J A. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science [M]. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.
- 3 Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. Shape modeling with front propagation: A level set approach [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2): 158~175.
- 4 Paragios N, Deriche R. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(3): 266~280.
- 5 Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piece-wise smooth functions and associated variational problems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577~685.
- 6 Chan F T, Vese L. Active contours without edges [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266~277.
- 7 Li Jun, Yang Xin, Shi Pengfei. A fast level set approach to image segmentation based on Mumford-Shah model [J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(11): 1175~1183.
- 8 Tsai Y H. Rapid and accurate computation of the distance function using grids [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 178(1): 175~195.